

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۲/۲۴

زمان برگزاری: ۶۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: بی نام

علامه طباطبائی - مشهد

۱ تعداد کل گراف‌های ساده را روی مجموعه $V = \{a, b, c, d, e\}$ بیابید. همچنین مطلوب است تعداد گراف‌هایی که:

الف - دارای ۵ یال باشد.

ب - دارای ۷ یال باشد و یال‌های ed, ab, cd را شامل باشد.

۲ در یک گراف با ۲۰ یال که درجه هر رأس آن حداقل ۴ است، بیشترین تعداد رأس کدام است؟

۳ در گرافی با رأس p و یال q که مجموعه رأس‌های آن $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ می‌باشد، ثابت کنید: $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$.

۴ گراف G ، ۳-منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

۵ آیا گراف K_7 ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۶ گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

۷ یک گراف ۵ رأسی غیر تهی k -منتظم رسم کنید به طوری که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۸ گرافی ساده و ۳-منتظم چنان رسم کنید که دوری به طول ۳ نداشته باشد.

۹ آیا گراف‌های ۳-منتظم مرتبه ۸ و ۲-منتظم مرتبه ۶ همواره همبند هستند؟

۱۰ گرافی با ۲۰ رأس همبند است. بیشترین و کمترین تعداد یال‌های این گراف را بنویسید.

۱۱ در گراف K_5 ، بین ۲ رأس دلخواه و متمایز u, v چند مسیر متفاوت وجود دارد؟

۱۲ در گراف G از مرتبه ۸ $p = 8$ ، تعداد عضوهای همسایگی باز رأس‌های گراف عبارتند از: ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۴، ۵. مکمل این گراف چند یال دارد؟

۱۳ گرافی ساده از مرتبه ۶ می‌باشد که مجموع درجات رأس‌های آن ۱۴ است. مجموع درجات رأس‌های \bar{G} کدام است؟

۱۴ یک گراف از مرتبه ۹ و اندازه ۳۵ دارای چند رأس از درجه \max است؟

۱۵ آیا گرافی ساده و ۱۰-منتظم با ۳۵ یال وجود دارد؟

۱۶ به ازای چند مقدار r ، گراف r -منتظم مرتبه ۱۵ وجود دارد؟

۱۷ گرافی ۳-منتظم از مرتبه p است. اگر $q + 4 = 2p$ ، مقادیر q و p را بیابید و گرافی با این مشخصات رسم کنید.

۱۸ با رأس a, b, c, d, e, f, g چند گراف ساده می‌توان ساخت به طوری که همسایگی باز رأس a حداقل ۴ عضو داشته باشد؟

۱۹ ۵ تیم فوتبال a, b, c, d, e در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دوبه‌دو باهم بازی می‌کنند. در مورد بازی‌های انجام شده اطلاعات زیر را داریم:

تیم a تیم‌های b, e را برده است. تیم b به تیم‌های a, c باخته است. تیم c از تیم d شکست خورده ولی تیم b را برده است.

تیم d نیز ۲ تیم c, e را برده است. تیم e به تیم a باخته و تیم c را شکست داده است. گراف جهت‌دار اطلاعات فوق را رسم کنید و اگر برای هر برد

۳ امتیاز در نظر بگیریم مشخص کنید که:

الف) تیم a با کدام تیم‌ها بازی نکرده است؟

ب) امتیاز تیم‌ها را بنویسید.



علامه طباطبائی مشهد

۲۰ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است.

ب) گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.

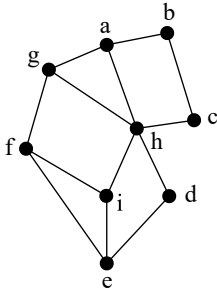
۲۱ در جاهای خالی، عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، یال دارد.

ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه همه رئوس لازم است.

پ) اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ در این صورت، $\Delta(G)$ برابر است.

۲۲ در گراف شکل زیر، یک مجموعه احاطه گر غیرمینیمال انتخاب کنید؛ سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن را به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کنید.



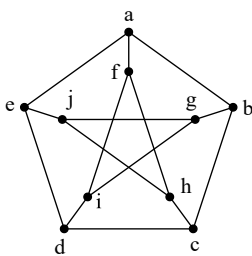
۲۳ الف) گراف P_8 را رسم کنید.

ب) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

ج) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

۲۴ الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد.

ب) در گراف روبه‌رو یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.



۲۵ گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبه گراف و Δ را مشخص کنید.

پاسخنامه تشریحی

$$\binom{5}{2} = 10 \rightarrow \text{تعداد کل گرافها} = 2^{10} = 1024$$

$$\text{تعداد گرافها} = \binom{10}{5} = 252$$

$$7 - 3 = 4, 10 - 3 = 7 \rightarrow \text{تعداد گرافها} = \binom{7}{4} = 35$$

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \Rightarrow 4 \leq \frac{2 \times 20}{p} \Rightarrow p \leq 10 \Rightarrow \max(p) = 10$$

$$\delta \leq \deg v_1 \leq \Delta$$

$$\delta \leq \deg v_2 \leq \Delta$$

⋮

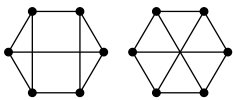
$$\delta \leq \deg v_p \leq \Delta$$

_____ +

$$\underbrace{\delta + \dots + \delta}_{\substack{p \\ \text{تعداد}}}} \leq \sum_{i=1}^p \deg v_i \leq \underbrace{\Delta + \dots + \Delta}_{\substack{p \\ \text{تعداد}}}}$$

$$\Rightarrow p\delta \leq 2q \leq p\Delta \xrightarrow{\div p} \delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

$$q = 2p - 3 \Rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \Rightarrow p = 6$$

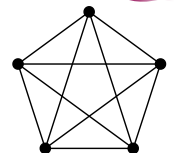


به یکی از دو گراف زیر داده می‌شود.

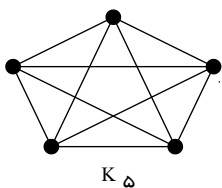
وجود ندارد. زیرا:

$$\sum_{i=1}^7 \deg v_i = 2q \Rightarrow 3 \times 7 = 2q \Rightarrow \text{زوج } 21 = 2q \text{ فرد}$$

$$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \Rightarrow p^2 - p - 20 = 0 \Rightarrow (p-5)(p+4) = 0 \Rightarrow p = 5$$

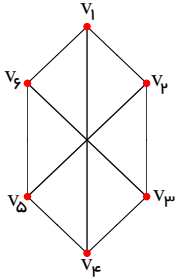
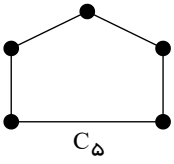


الف) بیشترین مقدار k برای ۵ رأس برابر ۴ است که گراف ۴-منتظم یا همان گراف کامل ۵ رأسی است (K_5) که درجه هر رأس آن برابر ۴ است.

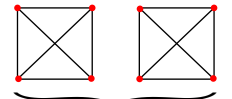


ب) کمترین مقدار k برای ۵ رأس برابر ۲ است که گراف ۲-منتظم یا همان گراف C_5 است که درجه هر رأس برابر ۲ است.

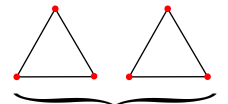
۸



۹ خیر، به عنوان مثال، می توان این گونه رسم کرد:



۳- منتظم مرتبه ۸



۲- منتظم مرتبه ۶

پس همواره همبند نیستند.

۱۰

$$q \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow q \leq \frac{20 \times 19}{2} \Rightarrow q \leq 190 \Rightarrow \max(q) = 190$$

$$p-1 \leq q \Rightarrow q \geq 19 \Rightarrow \min(q) = 19$$

۱۱

مسیر به طول ۱ $u, v \rightarrow 1$
 مسیر به طول ۲ $u, \boxed{3}, v \rightarrow u \underline{3} v \rightarrow 3$
 مسیر به طول ۳ $u, \boxed{3}, \boxed{2}, v \rightarrow u \underline{3} \underline{2} v \rightarrow 6$
 مسیر به طول ۴ $u, \boxed{3}, \boxed{2}, \boxed{1}, v \rightarrow u \underline{3} \underline{2} \underline{1} v \rightarrow 6$
 ۱۶

۱۲

$$\deg v_1 = 5, \deg v_2 = 4, \dots, \deg v_6 = 2$$

$$\sum_{i=1}^6 \deg v_i = 2q \rightarrow 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 2q \Rightarrow q = 12$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 12 + q(\bar{G}) = \frac{8 \times 7}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = 16$$

۱۳

$$\sum_{i=1}^6 \deg_G V_i + \sum_{i=1}^6 \deg_{\bar{G}} V_i = p(p-1) \Rightarrow 14 + x = 6 \times 5 \Rightarrow x = 16$$

۱۴ تعداد یال‌های این گراف را با تعداد یال‌های K_4 مقایسه می‌کنیم.

$$q = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

یعنی از K_4 باید یک یال حذف کنیم، پس از درجه ۲ رأس، یک واحد کم می‌شود.

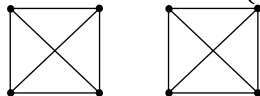
$$9 - 2 = 7$$

$$rp = 2q \Rightarrow 1 \circ p = 7 \circ \Rightarrow p = 7$$

$$rp = 2q \Rightarrow 15r = 2q$$

$$r = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$$

$$rp = 2q \Rightarrow 3p = 2q \Rightarrow \begin{cases} 3p = 2q \\ q + 4 = 2p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 8 \\ q = 12 \end{cases}$$



رأس a را کنار می‌گذاریم. با بقیه رأس‌ها، $2 \binom{6}{2} = 2 \times 15 = 30$ گراف می‌توان ساخت. درجه رأس a بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است، پس:

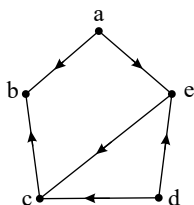
$$\deg a = 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6 \rightarrow \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$$

$$22 \times 2^{15} = 11 \times 2 \times 2^{15} = 11 \times 2^{16}$$

طبق اصل ضرب، تعداد گراف‌ها برابر است با:

۱۹

تیم a با تیم‌های d و c بازی نکرده است.



a : امتیاز ۶

b : امتیاز ۰

c : امتیاز ۳

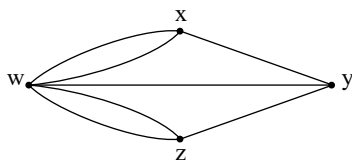
d : امتیاز ۶

e : امتیاز ۳

۲۰

نادرست

زیرا بین دو رأس « x, w »، « x, z » و « w, z » بیش از یک یال وجود دارد.



درست

گراف فرد منتظم مرتبه فرد قابل رسم نیست.

۲۱

۳ رأس

شکل زیر را در نظر بگیرید:

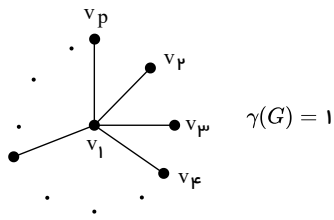
الف

الف

$$\text{تعداد یال‌های گراف کامل ۸ رأسی: } \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

ب





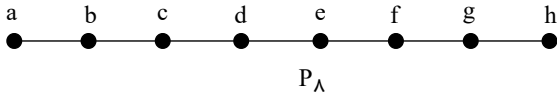
$$\Delta(G) = p - 1$$

رأس v_1 ماکزیم درجه است، بنابراین:

۲۲ یک مجموعه احاطه گر غیرمینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ است. اکنون با حذف رأس a از آن، یک مجموعه احاطه گر مینیمال به دست می آید.

۲۳

(الف)



(ب) یک γ -مجموعه برابر است با: $\{a, d, g\}$

(ج) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴عضوی برابر است با: $\{a, d, e, h\}$

۲۴ الف) اگر $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه گر غیرمینیمال باشد در این صورت، یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه احاطه گر مینیمال باقی می ماند. بنابراین عضوی مانند a_1 را در نظر می گیریم، اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم، در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم.

(ب) مجموعه $A = \{h, g, f, i, j\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال با ۵ عضو است.

۲۵

$$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p = 9, \Delta = p - 1 = 8$$