نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۶۰ دقیقه

نام آزمون: بی نام

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۲/۲۴

علامه طباطبایی_مشهد

۱ ثابت کنید اگر $n^{۲}$ مضرب ۸ باشد آنگاه n مضرب ۴ است.

۲ ثابت کنید اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۴k + ۱$ یا $p = ۴k + ۳$ نوشته می‌شود.

۳ رقم یکان عدد $(۲^{۱۱} + ۷)$ را به‌دست آورید.

۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید. (رقم یکان A را بیابید.)

۵ عکس عبارت «اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$» را بیان و اثبات کنید.

۶ اگر $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است.

$k \overset{۳}{\equiv} ۰$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۲$

(به عبارت دیگر، $k \in [۰]_{۳}$ یا $k \in [۱]_{۳}$ یا $k \in [۲]_{۳}$)

۷ اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید:

$m \leq n\ ,\ a|b \Rightarrow a^{m}|b^{n}$

۸ ثابت کنید اگر a برابر مجموع مربع‌های ۲ عدد صحیح باشد. $۲a$ نیز برابر مجموع مربع های دو عدد صحیح است.

۹ به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

۱۰ معادله هم‌نهشتی $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

۱۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۱۹ + ۳۸^{۳۶})$ را بر ۴ به‌دست آورید.

۱۲ ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به‌عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$.

۱۳ فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[۲۱a^{۲}, ۳۵a]$ را به‌دست آورید.

۱۴ برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید:

$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \geq xy + yz + xz$

۱۵ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۱۶ اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(۹a + ۶)$ را به‌دست آورید.

۱۷ ثابت کنید عدد $۱۲^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۲۳^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۱۸ با استفاده از بسط دوجمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^{n} = \binom{n}{۰} \times a^{n} + \binom{n}{۱} \times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} \times a^{n-۲}b^{۲} + \binom{n}{۳} \times a^{n-۳}b^{۳} + \cdots + \binom{n}{n} \times b^{n}$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^{n} \overset{ab}{\equiv} a^{n} + b^{n}$.

۱۹ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۲۰ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

۲۱ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

۲۲ اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q) = ۱$.

۲۳) عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^۳ < x^۲$.

۲۴) گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲$$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$(I)\ \ x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + zx$$

$$(II)\ \ x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$$

۲۵) ثابت کنید اگر $(a\,,\,b) = ۱$ ، $c|a\,,\,d|b$ آنگاه $(c\,,\,d) = ۱$.

۲۶) ثابت کنید اگر $a = bq + r$ آنگاه $(a\,,\,b) = (b, r)$

۲۷) ثابت کنید اگر n عددی طبیعی باشد کسر $\frac{۲۱n + ۴}{۱۴n + ۳}$ ساده شدنی نیست.

۲۸) فرض کنید $p\,,\,a\,,\,\in \mathbb{N}$ عددی اول باشد اگر $\frac{[a\,,\,b]}{(a\,,\,b)} = p$ آنگاه حاصل $\frac{a^۲ + b^۲}{(a^۳\,,\,b^۲)}$ را بیابید:

۲۹) صورت کلی جواب‌های معادلهٔ هم‌نهشتی $۷۳x \overset{۲۳}{\equiv} ۱$ را بیابید:

۳۰) در یک تقسیم مقسوم‌علیه برابر ۱۷ باقیمانده برابر ۳ می‌باشد حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد بدون آنکه خارج قسمت ، مقسوم علیه تغییر کنند؟

پاسخ‌نامه‌تشریحی

(۱) با توجه به فرض مسئله $n^{۲} = ۸q$ چون $n^{۲}$ مربع کامل است پس توان تمامی عوامل اول آن زوج است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت q مضرب ۲ است و می‌توان $n^{۲}$ را به صورت $۲^{۴}q'^{۲}$ نمایش داد حال داریم:

$$n^{۲} = ۲^{۴}q'^{۲} \to n = ۲^{۲}q' = ۴q'$$

بنابراین n مضرب ۴ است.

(۲)

باقی‌ماندهٔ هر عدد بر ۴ به یکی از صورت‌های زیر است:

$$p = ۴k\ (۱)\ ,\ p = ۴k + ۱\ (۲)\ ,\ p = ۴k + ۲\ (۳)\ ,\ p = ۴k + ۳\ (۴)$$

در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.

(۳)

$$۲^{۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۲^{۱۱} + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۵$$

رقم یکان برابر ۵ است.

(۴) می‌دانیم به‌ازای $n > ۴$، $۱۰|n!$ بنابراین داریم:

$$\forall n \geq ۵\quad ,\quad n \in \mathbb{N}\quad n! \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots ۵۰۰! \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + \cdots + ۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۵$) بنابراین رقم یکان A برابر ۳ می‌باشد.

(۵) باید ثابت کنیم که $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه a و b در تقسیم بر m هم‌باقی‌مانده‌اند. می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a = mq + r & ۰ \leq r < m \\ b = mq' + r' & ۰ \leq r' < m \end{cases}$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \to m|a - b \to m|mq + r - mq' - r' \to m|r - r'$$

$$\to r - r' = mk\ \ (k \in \mathbb{Z}) \to r = r' + mk\ \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow[۰ \leq r' < m]{۰ \leq r < m} k = ۰ \to r = r'$$

(۶) طبق قضیهٔ تقسیم k را می‌توان به یکی از سه فرم $۳q$، $۳q + ۱$ یا $۳q + ۲$ نمایش داد.

بنابراین ۳ حالت ممکن زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $k = ۳q$، $q \in \mathbb{Z}$:

$$۳|k \to k \overset{۳}{\equiv} ۰ \to k \in [۰]_{۳}$$

حالت دوم: $k = ۳q + ۱$، $q \in \mathbb{Z}$:

$$۳|۳q + ۱ - ۱ \to ۳|k - ۱ \to k \overset{۳}{\equiv} ۱ \to k \in [۱]_{۳}$$

حالت سوم: $k = ۳q + ۲$، $q \in \mathbb{Z}$:

$$۳|۳q + ۲ - ۲ \to ۳|k - ۲ \to k \overset{۳}{\equiv} ۲ \to k \in [۲]_{۳}$$

(۷)

$$a|b \longrightarrow a^{m}|b^{m} \xrightarrow{b \in \pi\ ,\ n - m \geq ۰} a^{m}|b^{m} \times b^{n-m} \longrightarrow a^{m}|b^{n}$$

(۸) به روش مستقیم ثابت می‌کنیم: (فرض می‌کنیم x و y دو عدد صحیح می‌باشند.)

$$a = x^{۲} + y^{۲} \Rightarrow ۲a = ۲x^{۲} + ۲y^{۲} = (x^{۲} + ۲xy + y^{۲}) + (x^{۲} - ۲xy + y^{۲})$$
$$= (x + y)^{۲} + (x - y)^{۲}$$

(۹)

$$xy \leq \frac{x^{۲} + y^{۲}}{۲} \Leftrightarrow ۲xy \leq x^{۲} + y^{۲} \Leftrightarrow x^{۲} + y^{۲} - ۲xy \geq ۰ \Leftrightarrow (x - y)^{۲} \geq ۰$$

گزاره همواره درست است.

(۱۰)

$$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ \overset{۱۲}{\equiv} ۳۲ \xrightarrow{(۸,۱۲)=۴} x \overset{\frac{۱۲}{۴}=۳}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۳k + ۴ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱۱

$$۳۸ \overset{۴}{\equiv} ۲ \rightarrow ۳۸^{۲} \overset{۴}{\equiv} ۴ \overset{۴}{\equiv} ۰ \rightarrow ۳۸^{۳۶} \overset{۴}{\equiv} ۰\ ,\ ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۳۸^{۳۶} + ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

۱۲

$$a \equiv b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۱۳

$$A = ۲۱a^{۲} = ۳ \times ۷ \times a^{۲}\ ,\ B = ۳۵a^{۲} = ۵ \times ۷ \times a^{۲} \Rightarrow [A,B] = ۱۰۵a^{۲}$$

۱۴

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow ۲x^{۲} + ۲y^{۲} + ۲z^{۲} \geq ۲xy + ۲yz + ۲xz \Leftrightarrow (x^{۲} + y^{۲} - ۲xy) + (y^{۲} + z^{۲} - ۲yz) + (x^{۲} + z^{۲} - ۲xz) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^{۲} + (y-z)^{۲} + (x-z)^{۲} \geq ۰$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

۱۵ باید همهٔ اعداد صحیح a را بیابیم که در معادلهٔ هم‌نهشتی $۵a + ۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۰$ صدق کنند داریم:

$$۵a + ۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \rightarrow ۵a \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۲ + (۳ \times ۱۱) \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \rightarrow a = ۱۱k + ۷\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

۱۶ طبق فرض داریم:

$$۳a - ۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۴a - ۷ \rightarrow ۱۰|(۴a-۷) - (۳a-۵) \rightarrow ۱۰|a-۲ \rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \quad (I)$$
$$\xrightarrow{(I)} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \times ۹ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \quad (II)$$
$$\xrightarrow{(II)} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

۱۷ می‌توان نوشت $۱۲ + ۱۱ = ۲۳$ بنابراین $(۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱}) - (۱۱+۱۲)^{۵۱} = ۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱}$ که با توجه به تمرین قبل $۱۱ \times ۱۲|(۱۱+۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})$ بنابراین $۱۳۲|۲۳^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})$.

۱۸

$$(a+b)^{n} - (a^{n} + b^{n}) = \binom{n}{۱} a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} a^{n-۲}b^{۲} + \cdots + \binom{n}{n-۱} ab^{n-۱}$$
$$= \sum_{i=۱}^{n-۱} \binom{n}{i} a^{n-i}b^{i}$$
$$\rightarrow ab|(a+b)^{n} - (a^{n} + b^{n}) \rightarrow (a+b)^{n} \overset{ab}{\equiv} a^{n} + b^{n}$$

۱۹ طبق فرض می‌توان نوشت $a = mq + r$ و $b = mq' + r$ داریم:

$$a - b = mq + r - (mq' + r) = mq - mq' = m(q - q') = mk$$

بنابراین $m|a-b$ در نتیجه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۲۰ با توجه به فرض $(m,n) = d$ بنابراین $d|m$ و $d|n$:

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{d|m} a \overset{d}{\equiv} b \quad (I)$$

$$b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow{d|n} b \overset{d}{\equiv} c \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} a \overset{d}{\equiv} b \\ b \overset{d}{\equiv} c \end{cases} \rightarrow a \overset{d}{\equiv} c$$

۲۱

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m|a-b$$

طبق فرض: $\left.\begin{matrix} m|a-b \\ n|m \end{matrix}\right\} \rightarrow n|a-b \rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

۲۲ فرض کنیم $(p,q) = d$ و $d \neq ۱$ بنابراین داریم:

$$d|p\ ,\ d|q \xrightarrow{\text{اول } q,p, d \neq ۱} d = p\ ,\ d = q \longrightarrow p = q$$

حال با توجه به اینکه $p = q$ با فرض مسئله در تناقض است نتیجه می‌گیریم $d = ۱$.

۲۳ برای مثال: $x - ۰٫۱$ یا $x = -۱$ را در نظر بگیرید.

۲۴ الف) x و y هم‌علامت‌اند بنابراین $xy > ۰$ خواهد بود؛ داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲ \Leftrightarrow xy\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq ۲xy \Leftrightarrow x^{۲} + y^{۲} \geq ۲xy$$

$\Leftrightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲ \geq ۰ \rightarrow$ همواره درست

ب)

$(I)\ \ x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + zx \leftrightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \geq ۲xy + ۲yz + ۲zx$

$\Leftrightarrow x^۲ + x^۲ + y^۲ + y^۲ + z^۲ + z^۲ - ۲xy - ۲yz - ۲zx \geq ۰$

$\Leftrightarrow (x-y)^۲ + (x-z)^۲ + (y-z)^۲ \geq ۰ \rightarrow$ همواره درست

۲۵ فرض کنید $d' = (c\,,\,d)$ در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d'|c \xrightarrow{c|a} d'|a \\ d'|d \xrightarrow{d|b} d'|b \end{array}\right\} \xrightarrow[d'|(a\,,\,b)]{(a\,,b)=۱} d' = ۱$$

۲۶ تذکر : $(a\,,\,b) = (a\,,\,ka + b)\ k \in \mathbb{Z}$

$(a\,,\,b) = (bq + r\,,\,b) = (bq + r - bq\,,b) = (r\,,\,b)$

۲۷ باید ثابت کنیم $(۲۱n + ۴\,,\,۱۴n + ۳) = ۱$ می‌توان نوشت:

$(۲۱n + ۴\,,\,۱۴n + ۳) = (۲۱n + ۴ - ۱۴n - ۳\,,\,۱۴n + ۳) = (۷n + ۱\,,\,۱۴n + ۳) = (۱\,,\,۷n + ۱) = d$

در نتیجه $d|۱$ بنابراین $d = ۱$، یعنی $۲۱n + ۴\,,\,۱۴n + ۳$ هیچ مقسوم علیه مشترکی جز ± ۱ ندارند و کسر مورد نظر ساده شدنی نیست.

۲۸

فرض کنید $(a\,,\,b) = d$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $a = a'd\,,\,b = b'd\,,(a'\,,\,b') = ۱$ در نتیجه $[a\,,\,b] = a'b'd$ حال می‌توان نوشت:

$$\frac{[a\,,\,b]}{(a\,,\,b)} = p \rightarrow \frac{a'b'd}{d} = p \rightarrow a'b' = p \rightarrow a' = ۱\,,\,b' = p$$

$$\frac{a^۲ + b^۲}{(a\,,\,b)} = \frac{(a'^۲ + b'^۲)d^۲}{d^۲} = a'^۲ + b'^۲ = ۱ + p^۲$$

۲۹ می‌توان نوشت:

$$۷۳x \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{۷۳ \overset{۲۳}{\equiv} ۴} ۴x \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ + ۲۳ \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \xrightarrow{(۴,۲۳)=۱} x \overset{۲۳}{\equiv} ۶$$

بنابراین داریم: $x = ۲۳k + ۶$.

۳۰ طبق فرض $a = ۱۷q + ۱۳$ اگر x واحد به a اضافه کنیم به طوریکه خارج قسمت تغییر نکند، الگوریتم تقسیم به فرم زیر در می‌آید:

$a + x = ۱۷q + (۳ + x)$

به طوریکه $۳ + x < ۱۷$ یا $x < ۱۴$ در نتیجه حداکثر مقدار x برابر ۱۳ می‌باشد.