تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۲/۲۴

زمان برگزاری: ۶۰ دقیقه

علامه طباطبایی_مشهد

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: بی نام

۱ از نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.

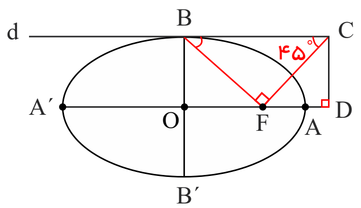
۲ مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی به طول ثابت L که دو سر آنها روی دو خط عمود برهم باشد را بیابید.

۳ دایره‌های $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $d\colon y=۳x-۸$ باشد و بر محورهای مختصات در ناحیهٔ چهارم مماس باشد.

۵ معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ $(۱,-۲)$ و خط $x=۳$ به یک فاصله‌اند را به دست آورید.

۶ در بیضی مقابل AA' و BB' در قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F=۴۵^\circ$، مقدار $\dfrac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



۷ نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O'(۲,۱)$ بوده و بر خط $۳x+۴y=-۵$ مماس باشد.

۹ وضعیت دو دایرهٔ $(x-۱)^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+(y-۱)^۲=۱$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۰ مساحت دایره‌ای که از نقطهٔ $A(۱,۲)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس شود را بیابید.

۱۱ مکان هندسی نقاطی را بیابید که از آنها بر دایرهٔ $C(O,R)$ دو مماس عمود بر هم رسم شود.

۱۲ در مثلث ABC، ضلع BC ثابت و فاصلهٔ رأس A از BC برابر با h است. با جابه‌جا شدن رأس A، مکان هندسی مرکز همرسی میانه‌های مثلث ABC را بیابید.

۱۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد.

۱۴ معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که نقاط $A(۴,-۱)\ ,\ B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشند.

۱۵ در مثلث ABC، نقاط M و N به‌ترتیب روی AB و AC قرار دارد. چند نقطه روی محیط مثلث MNB می‌توان یافت که از AB و AC به یک فاصله باشد؟ (M و N روی رأس‌های مثلث قرار ندارند).

۱۶ دو خط d و d' متقاطع هستند. چند نقطه وجود دارد که از d و d' به فاصلهٔ $۲cm$ است؟

۱۷ حدود c را طوری مشخص کنید که خط $L\colon ۳x+۴y+c=۰$ دایرهٔ $(x-۳)^۲+y^۲=۱$ را قطع کند.

۱۸ طول مماس رسم‌شده از نقطهٔ $M(۱,-۲)$ بر دایرهٔ $C\colon x^۲+y^۲+x-۲y-۱=۰$ را به دست آورید.

۱۹ معادلهٔ دایرهٔ C' را که مرکزش $O'(۵,۷)$ و بر دایرهٔ $C\colon x^۲+y^۲-۴x-۶y+۴=۰$ مماس می‌باشد را بنویسید.

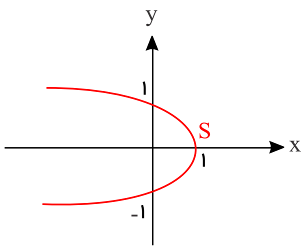
۲۰ معادلهٔ دایره‌ای که در ربع اوّل بر محورهای مختصات مماس باشد را بنویسید. همچنین معادلهٔ دایره‌ای که در ربع دوم، سوم و چهارم بر محورهای مختصات مماس باشد را بنویسید.

۲۱ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(۵,۳)$ کانون و $S(۱,۳)$ رأس آن باشد.

۲۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات بوده و بر خط $۴x + ۳y = ۵$ مماس باشد.

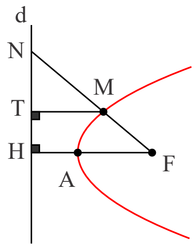
۲۳ نمودار معادلهٔ $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ را رسم کنید.

۲۴ در شکل زیر معادلهٔ سهمی و خط هادی آن را به دست آورید.



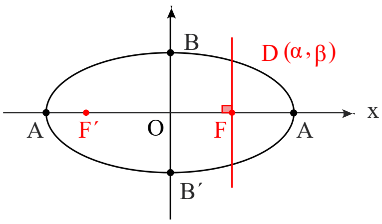
۲۵ معادلهٔ $y^۲ = ۶x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.

۲۶ در شکل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



۲۷ نقاط $F'(۲ - \sqrt{۵}, ۰)$ و $F(۲ + \sqrt{۵}, ۰)$ دو کانون یک بیضی و $A(۵, ۰)$ نقطه‌ای از آن است. خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

۲۸ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطهٔ F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده باشد. مختصات D را به دست آورید.



۲۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویهٔ بین آن دو خط می‌باشد.

بی نام

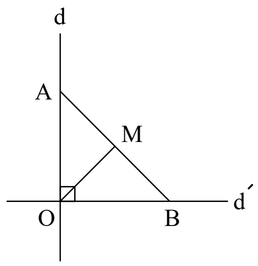
پاسخنامه تشریحی

۱

$$(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۵$$

$$O(۱,۱)\,,\ A(۲,۳)\to m_{OA}=\frac{y_A-y_o}{x_A-x_o}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲\xrightarrow{\text{شیب خط مماس}} m'=-\frac{۱}{۲}\to y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)$$

۲ مطابق شکل دو خط d و d' برهم عمودند. مثلث AOB همواره قائم‌الزاویه می‌باشد. اگر M وسط وتر AB باشد، چون میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس:



$$OM=\frac{AB}{۲}=\frac{L}{۲}$$

بنابراین با جابه‌جایی B و A، طول OM همواره مقدار ثابت $\frac{L}{۲}$ می‌باشد. پس مکان هندسی M دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{L}{۲}$ می‌باشد. توجه کنید که A و B در هر چهار ناحیه می‌توانند جابه‌جا شوند. (به‌جز چهار نقطه‌ای که روی دو خط d و d' می‌افتد.)

۳

$$C: x^{۲}+y^{۲}=۴\quad,\quad C': x^{۲}+y^{۲}-۲x=۴$$

$$O(۰,۰)\,,\ O'(۱,۰)\qquad r=۲\ ,\ r'=\sqrt{۵}$$

$OO'=\sqrt{۱^{۲}+۰}=۱\Rightarrow |r-r'|=\sqrt{۵}-۲<OO'<r+r'=\sqrt{۵}+۲\Rightarrow$ دو دایره متقاطع می‌باشند.

۴ اگر دایره‌ای در ناحیهٔ چهارم بر محورها مماس باشد، مرکز آن به‌صورت $O(R,-R)$ می‌باشد که R شعاع دایره است. داریم:

$O\in d\Rightarrow -R=۳R-۸\Rightarrow R=۲$ و $O(۲,-۲)$

معادلهٔ دایره: $(x-۲)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۴$

۵ نقطه‌های موردنظر را به‌صورت $M(x,y)$ در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آنها را از نقطهٔ $(۱,-۲)$ و خط $x=۳$ برابر قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{(x-۱)^{۲}+(y+۲)^{۲}}=|x-۳|\to (x-۱)^{۲}+(y+۲)^{۲}=(x-۳)^{۲}$$

$$\to x^{۲}-۲x+۱+y^{۲}+۴y+۴=x^{۲}-۶x+۹\to y^{۲}+۴y+۴x-۴=۰$$

۶

$$\left.\begin{array}{r}\hat{B}=\hat{C}=۴۵^{\circ}\to BF=FC\\ BF=a\end{array}\right\}\to BF=FC=a$$

$$\left.\begin{array}{r}\overset{\triangle}{BFC}: a^{۲}+a^{۲}=BC^{۲}\to BC=a\sqrt{۲}\\ OD=BC\end{array}\right\}\to BC=OD=a\sqrt{۲}$$

$$AD=OD-OA=a\sqrt{۲}-a=a(\sqrt{۲}-۱)$$

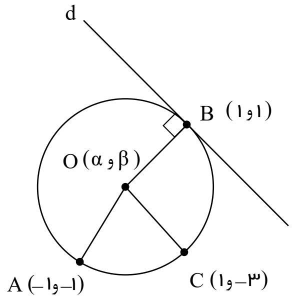
$$C\hat{F}D=F\hat{C}D=۴۵^{\circ}\to DF=DC$$

$$\overset{\triangle}{FDC}: DF^{۲}+DC^{۲}=a^{۲}\to DF^{۲}=\frac{a^{۲}}{۲}\to DF=\frac{a}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$AF=FD-AD=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a-(a\sqrt{۲}-a)=a(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۲}+۱)=a(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$\frac{AD}{AF}=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

۷ فاصلهٔ هریک از نقاط A، B و C تا مرکز برابر شعاع دایره است.



$$OA=OB\rightarrow\sqrt{(-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2}$$

$$\rightarrow(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2=(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2$$

$$\rightarrow\cancel{1}+2\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{1}+2\beta+\cancel{\beta^2}=\cancel{1}-2\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{1}-2\beta+\cancel{\beta^2}$$

$$\rightarrow 4\alpha+4\beta=0\rightarrow\alpha+\beta=0\quad(1)$$

$$OB=OC\rightarrow\sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(-3-\beta)^2}$$

$$\rightarrow\cancel{1}+\cancel{\alpha^2}-\cancel{2\alpha}+1+\cancel{\beta^2}-2\beta=\cancel{1}+\cancel{\alpha^2}-\cancel{2\alpha}+9+\cancel{\beta^2}+6\beta$$

$$\rightarrow 8\beta+8=0\rightarrow\beta=-1\xrightarrow{(1)}\alpha=1$$

مختصات مرکز: $O(1,-1)\quad,\quad R=OB=\sqrt{(1-1)^2+(1-(-1))^2}=2$

$\Rightarrow$ معادلهٔ دایره: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

شیب خط مماس در نقطهٔ B (m_d) معکوس قرینهٔ شیب BO می‌باشد.

$$m_{BO}=\frac{-1-1}{1-1}=\infty$$

بنابراین شیب‌خط مماس بر دایره در نقطهٔ B صفر است. پس معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر می‌باشد:

معادلهٔ خط مماس: $y=1$

۸ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، برابر با شعاع دایره است:

$$r=\frac{|3(2)+4(1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{15}{5}=3$$

معادلهٔ دایره برابر است با:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=9$$

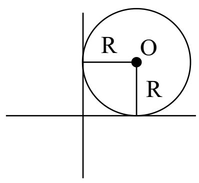
۹ مرکز و شعاع دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ برابر است با: $O=(1,0), r=1$

و مرکز و شعاع دایرهٔ $x^2+(y-1)^2=1$ برابر $O'=(0,1), r'=1$

فاصلهٔ دو مرکز برابر $OO'=\sqrt{2}$ است و $r+r'=2$ و $r-r'=0$ پس:

دو دایره متقاطع‌اند. $|r-r'|<OO'<r+r'\Rightarrow$

۱۰ چون دایره از نقطهٔ $A(1,2)$ می‌گذرد پس بر محورهای مختصات ناحیهٔ اول مماس است.



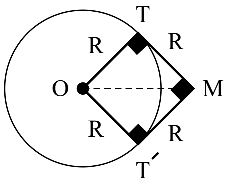
معادلهٔ چنین دایره‌ای برابر است با:

$$(x-R)^۲+(y-R)^۲=R^۲ \xrightarrow{(۱,۲)} (۱-R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲ \Rightarrow R^۲-۲R+۱+R^۲-۴R+۴=R^۲ \Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰ \Rightarrow R=۱ \text{ یا } R=۵$$

$$S=\pi R^۲ \Rightarrow S_۱=\pi \text{ یا } S_۲=۲۵\pi$$

۱۱ مطابق شکل مماس‌های رسم‌شده از M برهم عمودند $(\hat{M}=۹۰^\circ)$ و شعاع در نقطهٔ تماس بر مماس عمود است. $(\hat{T}=\hat{T}'=۹۰^\circ)$

مماس‌های رسم‌شده از M برابرند. یعنی: $MT=MT'$

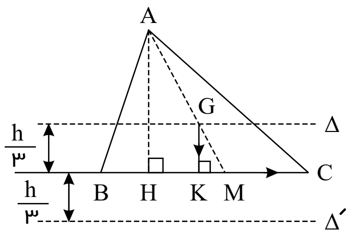


پس می‌توان نتیجه گرفت که $MTOT'$ مربع می‌باشد. داریم:

$$MT=MT'=OT=OT'=R \Rightarrow OM=\sqrt{۲}R$$

پس مکان هندسی M دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{۲}R$ می‌باشد.

۱۲ ارتفاع $AH=h$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که اگر G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، آنگاه داریم:



$$GM=\frac{۱}{۳}AM$$

در ادامه داریم:

$$GK||AH \Rightarrow \frac{GM}{AM}=\frac{GK}{AH}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow GK=\frac{AH}{۳}=\frac{h}{۳}$$

پس فاصلهٔ G از ضلع ثابت BC، همواره $\frac{h}{۳}$ است. بنابراین مکان هندسی G، دو خط موازی با BC و به فاصلهٔ $\frac{h}{۳}$ از آن در دو طرف BC می‌باشد.

۱۳

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases}$$

$$d: ۴x+۳y+۵=۰ \ , \ O(۲,-۱) \rightarrow r=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

مرکز دایره $O(۲,-۱)$ و شعاع آن برابر $r=۲$ است. معادلهٔ دایره برابر با $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$ است.

۱۴

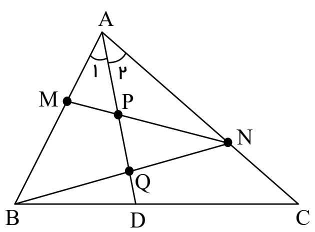
$$O(\frac{۴-۲}{۲},\frac{-۱+۱}{۲})=(۱,۰) \ ,|AB|=\sqrt{۶^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۱۰} \rightarrow r=\sqrt{۱۰}$$

معادلهٔ دایره: $(x-۱)^۲+y^۲=۱۰$

۱۵

مکان هندسی نقاطی که از AB و AC به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویهٔ A می‌باشد.

محل برخورد نیمساز AD با MN و BN پاسخ مسئله می‌باشد. (نقاط P و Q)

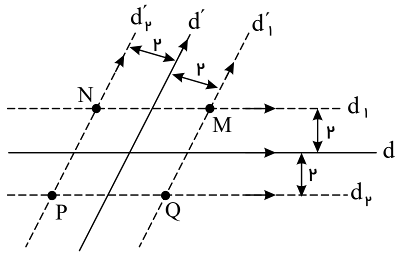


۱۶

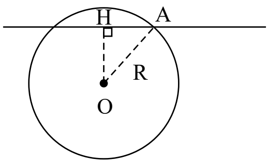
مکان هندسی نقاطی که از یک خط به فاصلهٔ $۲cm$ باشد، دو خط موازی با آن خط و به فاصلهٔ $۲cm$ از آن می‌باشد.

مطابق شکل، مکان هندسی نقاطی که از d به فاصلهٔ $۲cm$ باشند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ $۲cm$ از آن می‌باشد و به همین ترتیب برای d'.

محل برخورد این مکان‌ها، چهار نقطه جواب مسئله می‌باشد یعنی نقاط M، N، P و Q.



۱۷ اگر خط L، دایرهٔ C را قطع کند، آنگاه فاصلهٔ O تا این خط کمتر از شعاع دایره می‌باشد: $OH < R$

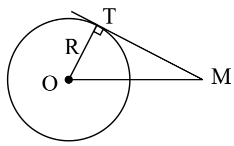


$$OH = \frac{|۳ \times ۳ + ۴ \times ۰ + c|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{|۹ + c|}{۵} < ۱ \Rightarrow |۹ + c| < ۵$$

$$\Rightarrow -۵ < ۹ + c < ۵ \Rightarrow -۱۴ \leq c \leq -۴$$

۱۸

مطابق شکل داریم:



$$x^۲ + y^۲ + x - ۲y - ۱ = ۰ \Rightarrow (x + \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} + (y - ۱)^۲ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$(x + \frac{۱}{۲})^۲ + (y - ۱)^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow O(-\frac{۱}{۲}, ۱) \text{ و } R = \frac{۳}{۲} \qquad (۱)$$

$$MO = \sqrt{(۱ - (-\frac{۱}{۲}))^۲ + (-۲ - ۱)^۲} = \sqrt{\frac{۹}{۴} + ۹} = \frac{\sqrt{۴۵}}{۲} \qquad (۲)$$

در نتیجه مطابق شکل طول مماس MT برابر است با:

$$MT^۲ = OM^۲ - R^۲ \xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} \frac{۴۵}{۴} - \frac{۹}{۴} = \frac{۳۶}{۴} = ۹ \Rightarrow MT = ۳$$

۱۹

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y + ۴ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۴x + ۴) + (y^۲ - ۶y) = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ - ۹ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۹ \Rightarrow O(۲, ۳) \text{ و } R = ۳$$

حالت اوّل C و C' مماس خارج باشند:

$$OO' = d = R + R' \Rightarrow \sqrt{(۵ - ۲)^۲ + (۷ - ۳)^۲} = ۳ + R' \Rightarrow ۵ = ۳ + R' \Rightarrow R' = ۲$$

$$C' : (x - ۵)^۲ + (y - ۷)^۲ = ۴$$

حالت دوم C و C' مماس داخل باشند:

$$OO' = d = |R - R'| \Rightarrow ۵ = |۳ - R'| \Rightarrow ۳ - R' = ۵ \text{ یا } ۳ - R' = -۵$$

$$\Rightarrow R' = -۲ \text{ (غ ق ق) یا } R' = ۸ \Rightarrow (x - ۵)^۲ + (y - ۷)^۲ = ۶۴$$

۲۰

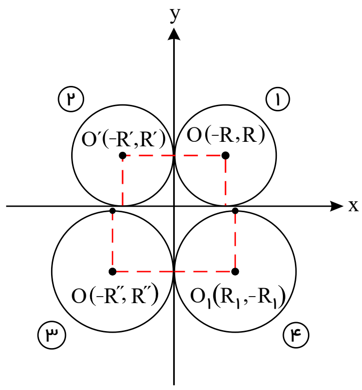
بی نام

معادلهٔ «۱»: $(x-R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$

معادلهٔ «۲»: $(x+R')^۲+(y-R')^۲=R'^۲$

معادلهٔ «۳»: $(x+R'')^۲+(y+R'')^۲=R''^۲$

معادلهٔ «۴»: $(x-R_۱)^۲+(y+R_۱)^۲=R_۱{}^۲$



۲۱ از آنجا که F و S دارای عرض‌های برابر هستند، نتیجه می‌گیریم که سهمی افقی می‌باشد. می‌دانیم که فاصلهٔ FS برابر a می‌باشد. از طرفی با توجه به مختصات F و S نتیجه می‌گیریم که دهانهٔ سهمی به‌سمت راست می‌باشد. داریم:

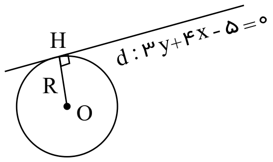
$$FS=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۳-۳)^۲}=۴\Rightarrow a=۴$$

معادلهٔ سهمی برابر است با:

$$\text{معادلهٔ سهمی}: (y-۳)^۲=۴\times ۴(x-۱)\Rightarrow (y-۳)^۲=۱۶(x-۱)$$

۲۲

از آنجایی که دایره بر خط $۳y+۴x=۵$ مماس است مطابق شکل داریم:



$d: ۳y+۴x-۵=۰$ و $O(۰,۰)$

$$OH=R=\frac{|۳\times ۰+۴\times ۰-۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

در نتیجه معادله دایرهٔ برابر است با:

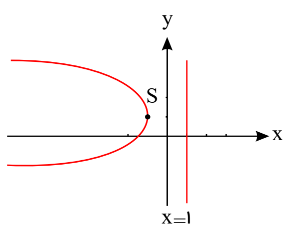
$$\text{معادلهٔ دایره}: x^۲+y^۲=۱$$

۲۳

$$y^۲-۲y=-۸x-۹\xrightarrow{+۱}y^۲-۲y+۱=-۸x-۹+۱\rightarrow (y-۱)^۲=-۸(x+۱)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{مختصات رأس}: A(-۱,۱)\\ ۴a=۸\rightarrow a=۲\\ \text{دهانهٔ سهمی رو به چپ است}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ خط هادی}: x=-۱+۲=۱$$



۲۴ سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به چپ است بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l}(y-\beta)^۲=-۴a(x-\alpha)\\ \text{مختصات راس } S(۱,۰)\end{array}\right\}\rightarrow (y-۰)^۲=-۴a(x-۱)\rightarrow y^۲=-۴a(x-۱)$$

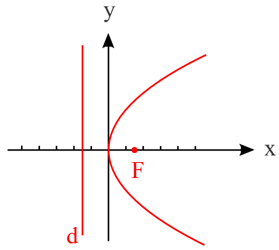
نقطهٔ $(۰,۱)$ روی سهمی قرار دارد بنابراین در معادلهٔ آن صدق می‌کند. $\rightarrow ۱=-۴a(۰-۱)\rightarrow a=\frac{۱}{۴}$

$$\text{معادلهٔ سهمی}: y^۲=-۴\times\frac{۱}{۴}(x-۱)\rightarrow y^۲=-(x-۱)$$

$$\text{معادلهٔ خط هادی}: x=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

۲۵

این معادله یک سهمی است که دهانهٔ آن رو به راست بوده و محور تقارن آن محور xهاست. با قرار دادن $۴a=۶$ داریم $a=\frac{۳}{۲}$. لذا کانون آن $F(\frac{۳}{۲},۰)$ و خط هادی آن موازی محور yها و به معادلهٔ $x=-\frac{۳}{۲}$ بوده و رأس آن مبدا مختصات است.



۲۶ فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی تا خط هادی برابر فاصلهٔ آن تا کانون است. بنابراین:

$$MT=MF \ , \ FA=AH$$

$$\left.\begin{aligned} MT \parallel FH \to \frac{MT}{FH}=\frac{NT}{NH} \to \frac{MT}{۲FA}=\frac{NT}{NH} \\ MT \parallel FH \to \frac{MF}{FN}=\frac{TH}{HN} \to \frac{MT}{FN}=\frac{TH}{NH} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی را بر هم}} \frac{\frac{\cancel{MT}}{۲FA}}{\frac{\cancel{MT}}{FN}}=\frac{\frac{NT}{\cancel{NH}}}{\frac{TH}{\cancel{NH}}}$$

$$\to \frac{FN}{۲FA}=\frac{NT}{TH} \to \frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

۲۷

$$FF'=۲c=\sqrt{(۲+\sqrt{۵}-(۲-\sqrt{۵}))^۲+(۰,۰)^۲}=۲\sqrt{۵} \to c=\sqrt{۵}$$

$$AF+AF'=۲a \to \sqrt{(۵-۲-\sqrt{۵})^۲+۰^۲}+\sqrt{(۵-۲+\sqrt{۵})^۲+۰^۲}=۲a$$

$$\to |۳-\sqrt{۵}|+|۳+\sqrt{۵}|=۲a \to ۳-\cancel{\sqrt{۵}}+۳+\cancel{\sqrt{۵}}=۲a \to ۶=۲a \to a=۳$$

خروج از مرکز: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۲۸

$$OF=FA=۴ \to \alpha=۴$$

$$FF'=OF+OF'=۴+۴=۸ \to ۲c=۸ \to c=۴$$

$$OA=OF+FA=۴+۴=۸ \to a=۸$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \to ۸^۲=b^۲+۴^۲ \to b=\sqrt{۶۴-۱۶}=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

اندازهٔ DF برابر نصف کوتاه‌ترین وتر کانونی است بنابراین:

$$DF=\frac{b^۲}{a}=\frac{(۴\sqrt{۳})^۲}{۸}=\frac{۱۶\times ۳}{۸}=۶ \to \beta=۶$$

مختصات نقطهٔ D به‌صورت $(۴,۶)$ می‌باشد.

۲۹

الف درست