تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۲/۲۴

زمان برگزاری: ۶۰ دقیقه

علامه طباطبایی_مشهد

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: بی نام

۱ در دستگاه $\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به‌صورت $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ است. $x+y$ را به‌دست آورید.

۲ اگر $A=\left[i^۲-j\right]_{۲\times۲}$ وارون ماتریس A را بیابید.

۳ اگر $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ x & ۱ \end{bmatrix}$ و $B^{-۱}=B^۲$ باشد، مقدار x چقدر است؟

۴ اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$(A^{-۱}BA)^n=A^{-۱}B^nA$$

۵ دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x-y=۴ \\ -۴x+۲y=۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توان از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کرد؟ توضیح دهید.

۶ اگر A ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ باشد و $|A|=۳$، حاصل $|۳A|+|۲A^{-۱}|$ را به دست آورید.

۷ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & |A| \\ ۴|A| & ۱ \end{bmatrix}$ مقدار $|A|$ را به دست آورید.

۸ اگر A وارون‌پذیر و $A^۲=A$ باشد، وارون $(I-۳A)$ را بیابید.

۹ اگر $A^۳=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۹ & -۳ \end{bmatrix}$ حاصل دترمینان $(۲A)^{-۱}$ را به دست آورید.

۱۰ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲|A| & |A| \\ ۵|A| & -۳ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد، معکوس A را بیابید.

۱۱ اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر از مرتبهٔ n باشند. ثابت کنید:

$$\left|A^{-۱}+B^{-۱}\right|=\frac{|A+B|}{|AB|}$$

۱۲ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ اعداد m و n و r را طوری پیدا کنید به طوری که داشته باشیم $mA^۲+nA+rI=\overline{O}$.

۱۳ اگر A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{|A|}$$

۱۴ اگر A و B وارون‌پذیر باشد و $AB=A+B$ ثابت کنید:

$$A^{-۱}+B^{-۱}=I$$

۱۵ اگر A و B ماتریس‌های وارون‌پذیر و $A^۲=A$ و $B^۲=B$ باشد؛ آنگاه حاصل $(A+B)^{-۱}$ را به دست آورید.

۱۶ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A+I)^۶=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ حاصل $a-b$ را به دست آورید.

۱۷ نشان دهید ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ در رابطهٔ $A^۲-۳A+۳I=\overline{O}$ صدق می‌کند.

۱۸ اگر $\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ x & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & x \end{vmatrix}=۸$ باشد مقدار x را به‌دست آورید.

۱۹ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ به‌صورت زیر معرفی شده باشد ماتریس A را بیابید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & ,i=j \\ i-j & ,i>j \\ j-i & ,i<j \end{cases}$$

۲۰ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=۵$، در این صورت حاصل $||A|\,A|$ را بیابید.

۲۱ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^{۲}|$ را به دست آورید.

۲۲ اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{۱۱}=۴$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

۲۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این‌صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

۲۴ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورید و برقراری تساوی $|AB|=|A|\,|B|$ را بررسی کنید.

۲۵ نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}=۰$ معادلهٔ خطی است که از نقاط (a,b) و (c,d) می‌گذرد.

۲۶ اگر A و B ماتریس‌های وارون‌پذیر باشند و $B=\left(A^{۲}\right)^{-۱}$ ثابت کنید.

$A^{-۱}=AB$

۲۷ به‌ازای چه مقدار m ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & ۳ \\ ۱ & m-۲ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر <u>نیست</u>؟

۲۸ ماتریس مربعی A در تساوی $۲A^{۲}-A+I=\bar{O}$ صدق می‌کند. ابتدا نشان دهید A وارون‌پذیر است، سپس وارون A را حساب کنید.

۲۹ اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این‌صورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^{۲}-۵\,|A|+۶=۰$ برقرار باشد.

۳۰ اگر A و B مربعی و وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$

بی نام

پاسخنامه تشریحی

۱

$$\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \rightarrow x+y=۱+۳=۴$$

۲

$$A=\left[i^۲-j\right]_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۱^۲-۱ & ۱^۲-۲ \\ ۲^۲-۱ & ۲^۲-۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۳

$$B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & x \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^۲=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -x \\ x & x^۲-۱ \end{bmatrix}$$

$$B^{-۱}=B^۲ \rightarrow \begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -x \\ x & x^۲-۱ \end{bmatrix} \rightarrow x=-۱$$

۴

$$(A^{-۱}BA)^۲=(A^{-۱}BA)(A^{-۱}BA)=A^{-۱}B(\underbrace{AA^{-۱}}_{I})BA=A^{-۱}B^۲A$$

$$(A^{-۱}BA)^۳=(A^{-۱}B^۲A)(A^{-۱}BA)=A^{-۱}B^۲(\underbrace{AA^{-۱}}_{I})BA=A^{-۱}B^۳A$$

به همین ترتیب داریم: $(A^{-۱}BA)^n=A^{-۱}B^nA$

۵ خیر، زیرا دترمینان ماتریس ضرایب صفر است؛ بنابراین محاسبهٔ وارون امکان ندارد.

$$|A|=\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{vmatrix}=۴-۴=۰$$

درواقع معادلات این دستگاه، معادلهٔ ۲ خط موازی را نشان می‌دهد که می‌دانیم دو خط موازی نقطهٔ برخوردی (جوابی) ندارند.

$$\begin{cases} ۲x-y=۴ \\ -۴x+۲y=۲ \end{cases} \qquad \frac{۲}{-۴}=\frac{-۱}{۲}\neq\frac{۴}{۲}$$

۶

$$\left|۲A^{-۱}\right|+|۳A|=۲^۲\left|A^{-۱}\right|+۳^۲|A|=۴(\frac{۱}{|A|})+۹|A|=\frac{۴}{۳}+۲۷=\frac{۸۵}{۳}$$

۷

$$|A|=\begin{vmatrix} |A| & ۳ \\ ۱ & ۴|A| \end{vmatrix} \rightarrow |A|=۴|A|^۲-۳$$

$$\rightarrow ۴|A|^۲-|A|-۳=۰ \rightarrow \begin{cases} |A|=۱ \\ |A|=-\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

۸

$$A^۲=A \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^{-۱}} \underbrace{A^{-۱}A}_{I}A=\underbrace{A^{-۱}A}_{I} \rightarrow A=I$$

$$\rightarrow (I-۳A)^{-۱}=(I-۳I)^{-۱}=(-۲I)^{-۱}=-\frac{۱}{۲}I^{-۱}=-\frac{۱}{۲}I$$

۹

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix} \rightarrow |A|^۳=۲۷ \rightarrow |A|=۳$$

$$\left|(۲A)^{-۱}\right|=\left|\frac{۱}{۲}A^{-۱}\right|=\frac{۱}{۴}\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۰

$$A=\begin{bmatrix}|A| & ۲|A|\\ -۳ & ۵|A|\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{از دو طرف دترمینان می‌گیریم.}}|A|=۵|A|^{۲}+۶|A|\to ۵|A|^{۲}+۵|A|=۰$$

$$\to ۵|A|(|A|+۱)=۰\to\begin{cases}|A|=۰ & \text{غ ق ق}\\ |A|=-۱\end{cases}$$

$$\to A=\begin{bmatrix}-۱&-۲\\-۳&-۵\end{bmatrix}\to A^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}-۵&۲\\۳&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&-۲\\-۳&۱\end{bmatrix}$$

۱۱

$$\frac{|A+B|}{|AB|}=\frac{|A+B|}{|A|\,|B|}=\frac{۱}{|A|}\frac{|A+B|}{|B|}$$

$$=\left|A^{-۱}\right||A+B|\left|B^{-۱}\right|=\left|A^{-۱}(A+B)B^{-۱}\right|=\left|(I+A^{-۱}B)B^{-۱}\right|=\left|B^{-۱}+A^{-۱}\right|$$

۱۲

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۵&۳\\۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵&۳\\۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۱&۱۸\\۱۲&۷\end{bmatrix}$$

$$mA^{۲}+nA+rI=\overline{O}\to\begin{bmatrix}۳۱m&۱۸m\\۱۲m&۷m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵n&۳n\\۲n&n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r&۰\\۰&r\end{bmatrix}=\overline{O}$$

$$\to\begin{bmatrix}۳۱m+۵n+r&۱۸m+۳n\\۱۲m+۲n&۷m+n+r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}۱۸m+۳n=۰\\۱۲m+۲n=۰\end{matrix}\right\}\to ۶m+n=۰\Rightarrow n=-۶m$$

با جایگذاری $n=-۶m$ در درایه‌های دیگر نتیجه می‌گیریم $r=-m$؛ پس با فرض $m=۱$ مقادیر $n=-۶$ و $r=-۱$ به دست می‌آیند.

۱۳

$$A^{-۱}A=I\xrightarrow{\text{ازطرفین دترمینان می‌گیریم.}}\left|A^{-۱}A\right|=|I|$$

$$\to\left|A^{-۱}\right||A|=۱\to\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{|A|}$$

۱۴

$$AB=A+B\xrightarrow[\text{از سمت چپ}]{\text{ضرب در } A^{-۱}}A^{-۱}(AB)=A^{-۱}(A+B)$$

$$(A^{-۱}A)B=A^{-۱}A+A^{-۱}B\quad\to\quad IB=I+A^{-۱}B$$

$$\to B=I+A^{-۱}B\xrightarrow[\text{از سمت راست}]{\text{ضرب در } B^{-۱}}BB^{-۱}=(I+A^{-۱}B)B^{-۱}$$

$$I=IB^{-۱}+A^{-۱}BB^{-۱}\quad\to\quad I=B^{-۱}+A^{-۱}\quad\to\quad A^{-۱}+B^{-۱}=I$$

۱۵

$$A^{۲}=A\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^{-۱}}\underbrace{A^{-۱}A}_{I}A=\underbrace{A^{-۱}A}_{I}\to A=I$$

$$B^{۲}=B\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } B^{-۱}}\underbrace{B^{-۱}B}_{I}B=\underbrace{B^{-۱}B}_{I}\to B=I$$

$$\to(A+B)^{-۱}=(I+I)^{-۱}=(۲I)^{-۱}=\frac{۱}{۲}I^{-۱}=\frac{۱}{۲}I$$

۱۶

$$A+I=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}\to a-b=۲-۱=۱$$

$$(A+I)^{۲}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۴\\۴&۵\end{bmatrix}\to a-b=۵-۴=۱$$

$$(A+I)^{۳}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵&۴\\۴&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۴&۱۳\\۱۳&۱۴\end{bmatrix}\to a-b=۱۴-۱۳=۱$$

همانطور که می‌بینید در تمام توان‌ها $a-b=۱$ می‌باشد.

۱۷

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۳\\-۳&۰\end{bmatrix}$$

بی نام

$$۳A = \begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix} , ۳I = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A^۲ - ۳A + ۳I = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \overline{O}$$

۱۸ دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$۰ - ۱\begin{vmatrix} ۱ & x \\ x & ۱ \end{vmatrix} + ۰ = ۸ \to -(۱ - x^۲) = ۸ \to x^۲ - ۱ = ۸$$

$$\to x^۲ = ۹ \to x = \pm ۳$$

۱۹

$$A = [a_{ij}]_{۳\times ۲} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۰

$$||A|\,A| \xlongequal{|A|=۵} |۵A| = ۱۲۵\underbrace{|A|}_{۵} = ۶۲۵$$

۲۱ می‌دانیم $|A^n| = |A|^n$ بنابراین داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{vmatrix} = -۲\begin{vmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{vmatrix} = -۳۰$$

$$\to |A^۲| = |A|^۲ = (-۳۰)^۲ = ۹۰۰$$

۲۲ می‌دانیم ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که درایه‌ها یکسان هستند. چون $a_{۱۱} = ۴$ بنابراین داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{vmatrix} = ۶۴$$

۲۳

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = [-۲ - ۲ + ۹] = [۵] \to |AB| = ۵$$

$$BA = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۴ & -۶ \\ -۱ & -۲ & -۳ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$\to |BA| = -۲\underbrace{\begin{vmatrix} -۲ & -۳ \\ ۶ & ۹ \end{vmatrix}}_{۰} - (-۴)\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & -۳ \\ ۳ & ۹ \end{vmatrix}}_{۰} - ۶\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & -۲ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}}_{۰} = ۰$$

۲۴

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۲۵ & ۱۱ \end{bmatrix} \to |AB| = ۲۲ \quad (۱)$$

$$\begin{matrix} |A| = ۸ + ۳ = ۱۱ \\ |B| = ۶ - ۴ = ۲ \end{matrix} \to |AB| = ۱۱ \times ۲ = ۲۲ \quad (۲)$$

$$(۱) , (۲) \to |AB| = |A|\,|B|$$

۲۵ معادلهٔ خطی که از نقاط (a, b) و (c, d) می‌گذرد به شکل زیر است:

$$y - b = \frac{b-d}{a-c}(x - a) \to y = (\frac{b-d}{a-c})x - (\frac{ab - ad}{a-c}) + b$$

$$\to y = (\frac{d-b}{c-a})x + \frac{bc - ad}{c-a}$$

مطابق روش ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{matrix} = ۰ \to (bx + yc + ad) - (ay + dx + bc) = ۰$$

$$(b-d)x + (c-a)y + (ad - bc) = ۰$$

$(c-a)y=(d-b)x+(bc-ad)$

$y=(\frac{d-b}{c-a})x+\frac{bc-ad}{c-a}$

۲۶

$(A^{۲})^{-۱}=B$

$(A^{-۱})^{۲}=B\rightarrow A^{-۱}\times A^{-۱}=B$

$\xrightarrow{\times A}\underbrace{AA^{-۱}}_{I}\times A^{-۱}=AB\rightarrow A^{-۱}=AB$

۲۷

ماتریس A وارون‌پذیر نیست. $\rightarrow |A|=۰\rightarrow \begin{vmatrix} m & ۳ \\ ۱ & m-۲\end{vmatrix}=۰$

$\rightarrow m(m-۲)-۳=۰\rightarrow m^{۲}-۲m-۳=۰\rightarrow (m+۱)(m-۳)=۰\rightarrow \begin{cases} m=-۱ \\ m=۳\end{cases}$

۲۸

$-۲A^{۲}+A=I\rightarrow A(-۲A+I)=I\rightarrow |A|\,|I-۲A|=|I|$

$\rightarrow |A|\,|I-۲A|=۱\rightarrow |A|\neq ۰\rightarrow$ A وارون‌پذیر است.

$A(I-۲A)=I\rightarrow A^{-۱}=I-۲A$

۲۹

$|A|^{۲}-۵|A|+۶=۰\rightarrow (|A|-۲)(|A|-۳)=۰$

$\rightarrow |A|=۲\xrightarrow[c=۱,d=۴]{a=۱,b=۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴\end{vmatrix}=۴-۲=۲$

یا

$|A|=۳\xrightarrow[c=۳,d=۳]{a=۲,b=۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۳\end{vmatrix}=۶-۳=۳$

۳۰ طبق تعریف وارون باید ضرب AB و $B^{-۱}A^{-۱}$ برابر I باشد.

$(AB)(B^{-۱}A^{-۱})=A(\underbrace{BB^{-۱}}_{I})A^{-۱}=AIA^{-۱}=AA^{-۱}=I$

$(B^{-۱}A^{-۱})(AB)=B^{-۱}(\underbrace{A^{-۱}A}_{I})B=B^{-۱}IB=B^{-۱}B=I$