

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۲/۲۴

زمان برگزاری: ۶۰ دقیقه

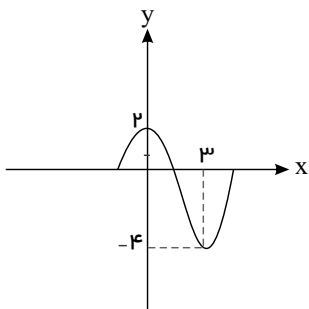
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: بی نام



علامه طباطبائی مشهد

$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$$



۱. معادله مثلثاتی $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

۲. دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

۳. معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

۴. نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه این تابع را بیابید.

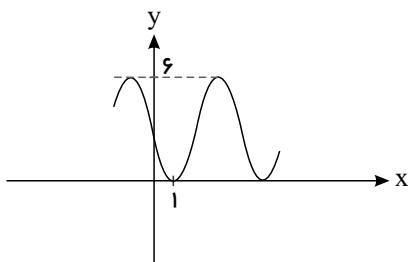
۵. معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

۶. معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

۷. الف) دوره تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید.

ب) دامنه تابع $f(x) = \tan(2x)$ را به دست آورید.

۸. اگر نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه این تابع را بیابید.



۹. به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار $\sin 22,5^\circ$ را به دست آورید.

ب) دوره تناوب و مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos 2\pi x + 1$ را به دست آورید.

پ) معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جوابهای کلی آن را بنویسید.

۱۰. معادله مثلثاتی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید.

۱۱. ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

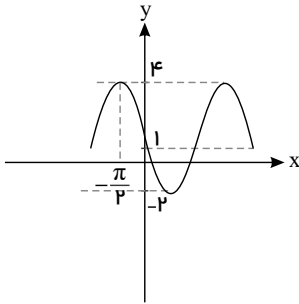
الف) $f(x) = |2 \sin 3x - 4|$

ب) $g(x) = |4 \cos 2x - 3|$



علامه طباطبائی مشهد

۱۲) نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه آن را بیابید.



۱۳) الف) مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin(\frac{-\pi}{3}x)$ را به دست آورید.

ب) معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$ را حل کرده، جوابهای کلی آن را بنویسید.

۱۴) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

۱۵) اگر دوره تناوب $f(x) = 3 \cos(mx) + 4$ برابر با $\frac{\pi}{5}$ باشد، دوره تناوب تابع $g(x) = -\cos(m+2)x$ را بیابید. ($m > 0$)

۱۶) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x + \sin 5x = 0$ را بیابید.

۱۷) جوابهای کلی معادله زیر را بیابید.

$$\sin^3 \pi x + \cos^3 \pi x = 0$$

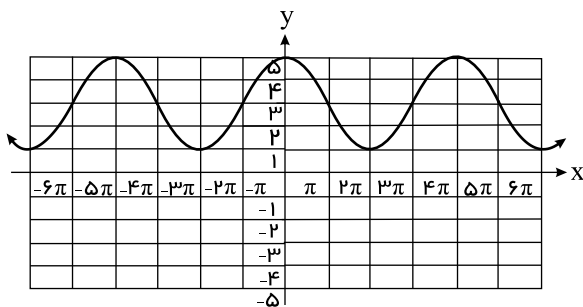
۱۸) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) برد تابع $y = \tan x$ برابر است.

۱۹) درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است.

۲۰) نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.



۲۱) الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

$$y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

ب) مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.

۲۲) مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.

۲۳) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود).

$$y = \pi \sin(-x) + 1$$



۲۴ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

۲۵ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) مینیمم تابع $y = -3 \cos(\pi x) + 2$ برابر با یک است.

ب) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.



پاسخنامه تشریحی

$$\cos x(2 \cos x - 9) = 5 \rightarrow 2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 9A - 5 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 81 + 40 = 121$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 11}{4} = 5 \rightarrow \cos x = 5 \text{ (امکان ندارد)} \\ A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 11}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

دوره تناوب تابع $y = a \cos bx + c$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$Max = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$Min = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

می دانیم $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\rightarrow \cos x(2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است.

$$\frac{T}{2} = 3 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \max f &= |a| + c = 2 \\ \min f &= -|a| + c = -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 1$$

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\sin x = A} A^2 + A - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 3 = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2} < -1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

(الف)

$$y = a \sin bx + c \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} \\ Max = |a| + c \\ Min = -|a| + c \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

$$Max = |a| + c = |-3| + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$\text{Min} = -|a| + c = -|-3| + 2 = -3 + 2 = -1$$

(ب)

$$y = \tan f(x) \rightarrow f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

پس:

$$f(x) = \tan 2x \rightarrow 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{T}{4} = 1 \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{max} = |a| + c = 6 \\ \text{min} = -|a| + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a < 0} a = -3$$

$$f(x) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3$$

الف

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sin^2 22,5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

ب

در تابع $y = a \cos bx + c$ دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $\text{Max} = |a| + c$ و $\text{Min} = -|a| + c$ است.

$$y = -3 \cos 2\pi x + 1 \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1 \\ \text{Max} = |-3| + 1 = 3 + 1 = 4 \\ \text{Min} = -|-3| + 1 = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

ب

می دانیم که $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

می دانیم که $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است. ۱۰

$$\sin x - \cos 2x = 0 \rightarrow \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = A} 2A^2 + A - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = -1 \rightarrow \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{الف) } f(x) = |2 \sin 3x - 4|$$

$$-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin 3x \leq 2 \Rightarrow -2 - 4 \leq 2 \sin 3x - 4 \leq 2 - 4$$

$$\Rightarrow -6 \leq 2 \sin 3x - 4 \leq -2 \Rightarrow 2 \leq |2 \sin 3x - 4| \leq 6 \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} \text{max } f = 6 \\ \text{min } f = 2 \end{cases}$$

$$\text{ب) } g(x) = |4 \cos 2x - 3|$$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4 \cos 2x \leq 4 \Rightarrow -4 - 3 \leq 4 \cos 2x - 3 \leq 4 - 3$$

$$-4 \leq 4 \cos 2x - 3 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |4 \cos 2x - 3| \leq 4 \Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} \min g = 0 \\ \max g = 4 \end{cases}$$

۱۲

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \xrightarrow{b > 0} b = 1$$

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 4 \\ \min = -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a < 0} a = -3$$

$$f(x) = -3 \sin x + 1$$

الف) می دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ همواره داریم: $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ ۱۳

$$\text{پس: } \begin{cases} \max = |-3| + 1 = 3 + 1 = 4 \\ \min = -|-3| + 1 = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

ب) می دانیم که $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha - \sin \alpha = 0 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \sin \alpha = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

۱۴

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{12}{13} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\text{الف) } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(\frac{25}{169} \right) - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$$

$$\text{ب) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{12}{13} \right) \left(\frac{5}{13} \right) = \frac{120}{169}$$

۱۵

$$\text{می دانیم: } f(x) = a \cos bx + c \text{ و } f(x) = a \sin bx + c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$f(x) = 3 \cos(mx) + 4 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow m = 10$$

$$\Rightarrow g(x) = -\cos 12x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

۱۶

$$\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v, \quad u = 2k\pi + \pi - v \text{ نکته:}$$

$$\sin 3x + \sin 5x = 0 \Rightarrow \sin 5x = -\sin 3x = \sin(-3x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x = 2k\pi - 3x \Rightarrow 8x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \\ 5x = 2k\pi + \pi - (-3x) = 2k\pi + \pi + 3x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \cup x = \frac{k\pi}{4}$$

۱۷

$$\text{نکته: } \cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x = 0 \Rightarrow \sin^2 \pi x = -\cos^2 \pi x \Rightarrow \sin \pi x = -\cos \pi x$$

$$\Rightarrow \cos \pi x = -\sin \pi x \Rightarrow \cos \pi x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right) \Rightarrow \pi x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right) \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \text{ جواب ندارد} \\ \pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \pi x \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k - \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

۱۸

الف
($-\infty, +\infty$)

۱۹

الف

نادرست (دوره تناوب $y = \tan x$ برابر π است.)

۲۰

$$c = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$|a| = \frac{5-1}{2} = 2, a > 0, a = 2$$

$$\Rightarrow y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \quad \text{یا} \quad y = 2 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 3$$

$$\Rightarrow \text{دوره تناوب} : T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

۲۱

الف

$$y = a \cos bx + c \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} \\ \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi \\ \max = |1| + 0 = 1 \\ \min = -|1| + 0 = -1 \end{cases}$$

ب

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

۲۲

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

۲۳ در تابع $y = a \sin bx + c$ ، $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ است.

$$y = \pi \sin(-x) + 1 \rightarrow y = -\pi \sin x + 1 \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi \\ \max = |a| + c = |-\pi| + 1 = \pi + 1 \\ \min = -|a| + c = -|\pi| + 1 = -\pi + 1 \end{cases}$$

۲۴ در تابع $y = a \sin bx + c$ می دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ است.

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi \\ \max = |-\pi| - 2 = \pi - 2 \\ \min = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2 \end{cases}$$

۲۵ الف نادرست - می دانیم تابع $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است. پس داریم:

$$\text{مقدار مینیمم} = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2$$

ب نادرست

زیرا همان طور که در شکل مشخص است تابع تناوب در یک دوره تناوب خود صعودی است، نه در دامنه.

